

hat daher

$$2 \sin \pi s \Pi(s-1) \zeta(s) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x)^{s-1} dx}{e^x - 1},$$

das Integral in der eben angegebenen Bedeutung verstanden.

Diese Gleichung giebt nun den Werth der Function $\zeta(s)$ für jedes beliebige complexe s und zeigt, dass sie einwerthig und für alle endlichen Werthe von s , ausser 1, endlich ist, so wie auch, dass sie verschwindet, wenn s gleich einer negativen geraden Zahl ist.

Wenn der reelle Theil von s negativ ist, kann das Integral, statt positiv um das angegebene Grössengebiet auch negativ um das Grössengebiet, welches sämmtliche übrigen complexen Grössen enthält, erstreckt werden, da das Integral durch Werthe mit unendlich grossem Modul dann unendlich klein ist. Im Innern dieses Grössengebiets aber wird die Function unter dem Integralzeichen nur unstetig, wenn x gleich einem ganzen Vielfachen von $\pm 2\pi i$ wird und das Integral ist daher gleich der Summe der Integrale negativ um diese Werthe genommen. Das Integral um den Werth $n 2\pi i$ aber ist $= (-n 2\pi i)^{s-1} (-2\pi i)$, man erhält daher

$$2 \sin \pi s \Pi(s-1) \zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1} ((-i)^{s-1} + i^{s-1}),$$

also eine Relation zwischen $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$, welche sich mit Benutzung bekannter Eigenschaften der Function Π auch so ausdrücken lässt:

$$\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s)$$

bleibt ungeändert, wenn s in $1-s$ verwandelt wird.

Diese Eigenschaft der Function veranlasste mich statt $\Pi(s-1)$ das Integral $\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right)$ in dem allgemeinen Gliede der Reihe $\sum \frac{1}{n^s}$ einzuführen, wodurch man einen sehr bequemen Ausdruck der Function $\zeta(s)$ erhält. In der That hat man

$$\frac{1}{n^s} \Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^{\infty} e^{-nn\pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

also, wenn man

$$\sum_1^{\infty} e^{-nn\pi x} = \psi(x)$$

setzt,

$$\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \int_0^{\infty} \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

oder da

$$2\psi(x) + 1 = x^{-\frac{1}{2}} \left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right), \quad (\text{Jacobi, Fund. S. 184})$$

$$\begin{aligned} \Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) &= \int_1^{\infty} \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_1^{\infty} \psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{\frac{s-3}{2}} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1} \right) dx \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \psi(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}} \right) dx. \end{aligned}$$

Ich setze nun $s = \frac{1}{2} + ti$ und

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right) (s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \xi(t),$$