Voisinages tubulaires dans les topos localement annelés.

Soit $(X,\underline{O}_X)$ un topos localement annelé. Soit $(X',\underline{O}_{X'})$ le Spectre de $\underline{O}_X$, qui est donc un topos localement annelé, muni d'un morphisme de topos annelé (morphisme pas nécessairement "admissible")

$$p: X' \longrightarrow X$$

jouant un rôle 2-universel pour des morphismes (admissibles ou non), de topos localement annelés dans X. De cette propriété universelle on déduit une "section" canonique

$$\varepsilon : X \longrightarrow X'$$

(définie à isomorphisme unique près), qui est un morphisme admissible de topos localement annelés, avec un isomorphisme donné

$$p\varepsilon \simeq id_X .$$

A prouver:

1) $\varepsilon^{-1}(\underline{O}_{X'}) \longrightarrow \underline{O}_X$ est un isomorphisme. (NB nous désignons par ε^{-1} le foncteur image inverse de faisceaux en tant que faisceaux d'ensembles, pour le distinguer du ε^* pour les faisceaux de modules).

2) Pour tout faisceau d'ensembles (resp. de groupes, resp. de groupes commutatifs) F' sur X', l'application canonique

$$\varepsilon^*: H^n(X',F') \longrightarrow H^n(X,\varepsilon^{-1}(F'))$$

est un isomorphisme pour $n=0$ (resp. pour $n\leq 1$, resp. pour tout n).

Soit maintenant $\underline{J}$ un Idéal de X, $\underline{O}_Y = \underline{O}_X/\underline{J}$, Y le topos résiduel du "l'ouvert de nullité de $\underline{O}_Y$" dans X (plus grand sous-objet de l'objet final sur lequel $\underline{O}_Y$ induit 0), qu'on regarde comme annelé par $\underline{O}_Y$. Soit $i:Y \longrightarrow X$ le morphisme (admissible) d'inclusion. Alors

$$i^{-1}(\underline{O}_X) \longrightarrow \underline{O}_Y$$

est un épimorphisme, de noyau $i^{-1}(\underline{J})$. Ceci posé, on appelle <u>voisinage tubulaire de Y dans X</u> le topos localement annelé Spec$(i^{-1}(\underline{O}_X))$, soit $\hat{X}$

On a donc un morphisme (non nécessairement admissible)

$$p\colon \hat{X} \longrightarrow (Y, i^{-1}(\underline{O}_X)) \quad ,$$

et un morphisme admissible "section"

$$\varepsilon\colon \ (Y, i^{-1}(\underline{O}_X)) \to \hat{X} \ ,$$

induisant (en admettant 1)) un isomorphisme

$$i^{-1}(\underline{O}_X) = \varepsilon^{-1}(\underline{O}_{\hat{X}}) \qquad .$$

Nous nous intéresserons plus particulièrement au morphisme composé

$$\hat{i} = \varepsilon i_0\colon \ Y \longrightarrow \hat{X} \quad , \qquad (\text{où } i_0\colon (Y, \underline{O}_Y) \to (Y, i^{-1}(\underline{O}_X)))$$

A prouver:

3) Moyennant $\hat{i}$, Y s'identifie encore à un "sous-topos localement annelé fermé de $\hat{X}$" i.e. peut se définir (à équivalence de topos près) comme Y dans X moyennant i, par un Idéal sur $\hat{X}$. (En fait, cette assertion revient à dire simplement que, indépendamment des structures annelées sous-jacentes, i permet d'identifier Y à un topos résiduel; et pour ceci, on peut se ramener au cas où J=0, i.e. avec les notations du début, à prouver que $\varepsilon\colon X \to X' = \mathrm{Spec}(\underline{O}_X)$ identifie X à un topos résiduel de X').

NB On peut donc encore former le voisinage tubulaire de Y dans $\hat{X}$. On constate qu'il est canoniquement équivalent à $\hat{X}$ lui-même, en respectant de plus les immersions canoniques de Y dans l'un et l'autre: l'opération "voisinage tubulaire" est idempotente !

Trouver les bonnes hypothèses sur J, $\underline{O}_X$ ...

4) (Si J de type fini ???) ~~Soit F un faisceau d'~~ensembles (resp. de groupes, resp. de groupes commutatifs) sur X, $\hat{F}$ son image inverse sur $\hat{X}$, alors l'homomorphisme canonique de faisceaux sur Y

(*)
$$\begin{tikzcd} & \hat{X} \arrow[d, "q"] \\ Y \arrow[ur, "\hat{i}"] \arrow[r, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

$$R^n i^!(F) \longrightarrow R^n \hat{i}^!(\hat{F})$$

pour n=0 (resp. pour n 1, resp. pour tout n) est un isomorphisme.

NB 4) Ne peut être vrai en général sans hypothèse sur $\underline{J}$ (prendre X et Y annelés par le même corps constant ....).

Variantes étales. Reprenons la situation du début, mais en supposant $\underline{O}_X$ strictement local, et désignons maintenant par X' son "Spectre étale". Alors on a encore une section $\varepsilon : X \longrightarrow X'$, relativement à laquelle on peut se proposer de prouver les assertions correspondant à 1) et 2). De même, lorsqu'on se donne un sous-topos localement annelé fermé Y de X, on introduira son voisinage tubulaire étale comme étant le spectre étale ($\hat{X}$) de $(Y, i^{-1}(\underline{O}_X))$, on trouve encore un diagramme commutatif (※) de topos (strictement) localement annelés, pour lequel il y a lieu de prouver les assertions analogues à 3) et 4). Il y a lieu de se demander également si l'on peut remplacer les spectres étales par les spectres fppf.

Application à l'homomorphisme de Gysin. Donnons-nous encore un topos localement annelé X, un sous-topos localement annelé Y défini par un Idéal (du type fini ...) $\underline{J}$. Soit A un faisceau d'anneaux sur X (sans rapport avec $\underline{O}_X$ à priori; dans le cas qui nous intéresse au premier chef, A sera constant), et supposons qu'il existe un entier d (jouant le rôle d'une codimension de Y dans X) tel qu'on ait des relations "de pureté"

$$\underline{H}^n_Y(A)=0 \quad \text{pour} \quad n\neq d \quad .$$

On en déduit donc des isomorphismes

$$H^n_Y(X,A) = H^{n-d}(Y,T) \qquad \text{où} \quad T = \underline{H}^d_Y(A) \quad ,$$

et par suite des homomorphismes (du type Gysin)

$$i_* : \quad H^{n-d}(Y,T) \longrightarrow H^n(X,A) \quad \text{i.e.} \quad H^*(Y,T) \longrightarrow H^*(X,A)$$

(homomorphisme de degré d de groupes gradués). D'ailleurs, utilisant l'homomorphisme de restriction $H^*(X,A) \longrightarrow H^*(Y,A)$, on voit que les cups-produits permettent de regarder les deux membres de (※) comme des modules gradués sur l'anneau gradué $H^*(X,A)$. On vérifie aisément la formule de projection, affirmant que l'homomorphisme en question est linéaire par rapport à $H^*(X,A)$.

Considérons alors le composé

$$i^* i_* : \quad H^*(Y,T) \longrightarrow H^*(X,A) \longrightarrow H^*(Y,A) \quad ,$$

qui est un homomorphisme d'objets gradués de dergé d, linéaire par rapport à $H^*(X,A)$. Regardant les membres extrêmes ~~par~~ comme des modules sur $H^*(Y,A)$, on peut se demander si cet homomorphisme n'est pas en fait linéaire par rapport à $H^*(Y,A)$; on sait seulement à priori qu'il l'est par rapport au sous-anneau $\mathrm{Im}(H^*(X,A) \to H^*(Y,A))$. On gagne dans le cas où $H^*(X,A) \to H^*(Y,A)$ est surjectif.

Mais utilisons maintenant le faisceau structural $\underline{O}_X$ et le fait que Y soit défini par un Idéal $\underline{J}$, ce qui nous permet d'introduire le voisinage tubulaire $\hat{X}$ de Y dans X. Utilisant 4), l'hypothèse de pureté pour i, A, d implique la même hypothèse pour $\hat{i}, \hat{A}$, d , ce qui nous ramène au cas où X est un voisinage tubulaire de Y? Mais dans ce cas, en vertu de 2), $H^*(X,A) \to H^*(Y,A)$ est surjectif, on gagne !

<u>Cas particulier</u> Soient X un schéma lisse sur un S, Y un sous-schéma lisse de codimension c, on travaille avec les topos étales. On prend pour A un faisceau constant $\underline{Z}/m\underline{Z}$, m premier aux caractéristiques résiduelles de Y, et d=2c . On trouve alors, pour tout faisceau de A-Modules F sur X qui est localement libre au voisinage étale de Y, des homomorphismes de Gysin de degré d=2c

$$i_* : H^*(Y, F|Y) \longrightarrow H^*(X, F \otimes \mu_m^{\otimes c}) \quad ,$$

et on trouve la formule

$$i^* i_*(y) = \gamma y \quad , \qquad \text{avec } \gamma = i^* i_*(1) \in H^{2c}(Y, \mu_m^{\otimes c}) \quad .$$

(Sans doute γ est aussi la dernière classe de Chern du fibré conormal de Y dans X , mais on n'a prouvé que des énoncés un peu moins précis et généraux...)

MAY:

$\mathcal{T}$ pointed spaces

$\tilde{F}^n = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(S^n, S^n)$

$\tilde{F} = \varinjlim_n \tilde{F}^n$ $\qquad$ $\tilde{F}_q$ maps of degree q.

$F = \tilde{F}_1 \cup \tilde{F}_{-1}$, $SF = \tilde{F}_1$

BF classifying space.

$0 \to PL \to F \to F/PL \to 0$

What is $H^*(BF)$?

Set $Q(X) = (\varinjlim \Omega^n S^n X)_0$

As spaces $S\tilde{F} \cong Q(S^0)_0 \cong \Omega Q(S^1)_0$

and $H^*(\Omega Q(S^1))$ known as a Hopf algebra by Dyer-Lashof.

Thm: $H^*(Q(S^0)_0) \cong H^*(SF)$ as algs. $\qquad$ p odd prime

---

$\Omega^n X \times \tilde{F}^{n-1} \xrightarrow{c} \Omega^n X$

defines an action of $\tilde{F}^{n-1}$ on $\Omega^n X$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hopf algebra}}}{H_*(\Omega^n X)} \otimes H_*(\tilde{F}^{n-1}) \xrightarrow{c_*} H_*(\Omega^n X)$$

This is an action of the Hopf alg. of $H_*(\tilde{F}^{n-1})$ on the algebra $H_*(\Omega^n X)$ since

$$(a * b) f = af * bf$$

where $*$ = addition in $\Omega^n X$.

Suppose $B = B_0, B_1, \ldots$ $\quad B_q \cong \Omega B_{q+1}$ on the nose

$$c_n : \underset{\substack{\| \\ B}}{\Omega^n B_n} \times \tilde{F}^{n-1} \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ B}}{\Omega^n B_n}$$

$$c_{n+1} = c_n (1 \times \mathcal{S})$$

So can take limit

$$c : B \times \tilde{F} \longrightarrow B$$

Thus $\tilde{F}$ right acts on any strict infinite loop space B.

So $H_*(B)$ ~~is a Hopf~~ is a Hopf alg. on which the Hopf alg. $H_*(SF)$ acts.

Take $B_q = Q(S^q)$ so that $H_*(QS^0)$ is acted on by $H_*(SF)$.

$$Q(S^0) \longrightarrow SF$$
$$a \longmapsto a * 1$$

$x, y \in H_+(QS^0)$ $\qquad (x*1)(y*1) = \sum' x(y*1)*1$

$\qquad + \sum x(y_i * 1) * (y' * 1)$

$\qquad + x * y * 1$

$H_*(F)$ commutative algebra

$\phi \cdot f = \varepsilon(f) \cdot \phi$

$$(y*1)\,x = yx + \sum yx' * x''$$

Conclude $(x*1)(y*1) = xy*1 + \sum \pm x'y' * x'' * y'' * 1$
$+ \sum \pm xy' * y'' * 1$
$+ \sum x'y * x'' * 1$

Now pass to associated graded Hopf algebra $E^0A \cong A$ as algebras. Then if $x \in PE^0 H(SF)$

$$\boxed{(x*1)^k = x^{[k]} * 1 \neq 0}$$

$x^k = x*x*\cdots$ k times.

Proof: $(x*1)^2 = \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{x^2*1} + x*x*1$

$$(x*1)^k = \sum{}' x^i * x^{[k-i]} * 1$$

induction, ϕ acts as 0.

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{primitive}}}{(x*1)^p} =$

$\Rightarrow \sum_{2 \le i \le p-2} x^i * x^{[k-i]} * 1$ primitive

$\psi(x^i) = x^i \otimes \phi + \phi \otimes x^i$

since ϕ acts as 0.

$\psi(x[k-i]) = \sum{}' (j, i-j)\, x^{[j]} \otimes x^{[i-j]}$

calculation shows $(p=3)$

$$x^2 \otimes x = 0 \implies x^2 = 0.$$

$H(SF)$ free commutative

$H_*(QS^0)$

$I = (\varepsilon_1, s_1, \ldots, \varepsilon_k, s_k)$

$$p s_{i+1} - \varepsilon_{i+1} \geq s_i > \left[r + \sum_{j=i+1}^{k} 2 s_j (p-1) - \varepsilon_j \right] \cdot \frac{1}{2}$$ r-admissible

$$Q^I = \beta^{\varepsilon_1} Q^{s_1} \cdots \beta^{\varepsilon_k} Q^{s_k}$$

usual Cartan + Adem

Thm: $\pi_0(X) = 0$ $\quad H(QX)$ free comm. gen. by x, $Q^I x$

x basis for $H(X)$

$H(QS^0)$ free comm. on 0-admissible sequences

$$H^*(BSF) = H^*(BF) = P\{\xi_i\} \otimes E\{\beta \xi_i\} \otimes C$$

$2i(p-1)$

Conjecture $\quad C \simeq \Gamma(\ ) \otimes E(\ ).$

$\exists$ space J found by Stasheff $\ni H^*(J) = P(\xi_i) \otimes E(\beta \xi_i).$

Hope: $\quad F \simeq J \times \operatorname{Coker} J$