

# Endoscopie et analyse harmonique sur les groupes $p$ -adiques

J.-L. Waldspurger

20 avril 2009

## 1 Introduction

Soit  $G$  un groupe réductif connexe défini sur  $\mathbb{Q}$ . Notons  $Z_G$  son centre,  $A_G$  le plus grand sous-tore de  $Z_G$  qui soit déployé sur  $\mathbb{Q}$  et  $A_G(\mathbb{R})_{>0}$  la composante neutre du groupe de Lie  $A_G(\mathbb{R})$ . Notons  $\mathbb{A}$  l'anneau des adèles de  $\mathbb{Q}$ . Le quotient  $A_G(\mathbb{R})_{>0}G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$  est de volume fini. Le groupe  $G(\mathbb{A})$  agit par translations à droite sur l'espace de Hilbert  $L^2(A_G(\mathbb{R})_{>0}G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ . Par définition, le spectre discret  $L^2_{disc}(A_G(\mathbb{R})_{>0}G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$  est la somme des sous-espaces fermés invariants par  $G(\mathbb{A})$  et irréductibles. Notons  $\rho^G_{disc}$  la représentation de  $G(\mathbb{A})$  dans ce spectre discret. On sait que c'est une somme directe de représentations irréductibles, chacune intervenant avec multiplicité finie. Appelons-les représentations automorphes discrètes. Un problème central est de caractériser ces représentations automorphes discrètes et de calculer leurs multiplicités.

Notons  $\hat{G}$  le groupe dual de  $G$ , c'est-à-dire le groupe réductif connexe sur  $\mathbb{C}$  dont les données de racines s'obtiennent à partir de celles de  $G$  en échangeant racines et coracines. Fixons une clôture algébrique  $\bar{\mathbb{Q}}$  de  $\mathbb{Q}$ , notons  $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  le groupe de Galois associé. La structure de  $G$  sur  $\mathbb{Q}$  détermine une action de  $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  sur  $\hat{G}$ . On définit le  $L$ -groupe  ${}^L G = \hat{G} \rtimes Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . Une donnée endoscopique pour  $G$  est, en première approximation, un triplet  $(H, s, {}^L \xi)$  vérifiant les conditions suivantes. Le premier terme  $H$  est un groupe réductif connexe défini et quasi-déployé sur  $\mathbb{Q}$ , le deuxième terme  $s$  est un élément semi-simple de  $\hat{G}$  et le dernier terme est un  $L$ -plongement  ${}^L \xi : {}^L H \rightarrow {}^L G$ , c'est-à-dire un homomorphisme continu injectif, algébrique sur  $\hat{H}$  et commutant aux projections sur  $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . La condition essentielle est que  ${}^L \xi(\hat{H}) = \hat{G}_s$ , ce dernier groupe étant par définition la composante neutre du commutant de  $s$  dans  $\hat{G}$ . Signalons que l'on oublie parfois les termes  $s$  et  ${}^L \xi$  en disant simplement que  $H$  est un groupe endoscopique de  $G$ . Considérons une telle donnée endoscopique, que l'on suppose "elliptique", c'est-à-dire que l'image de  ${}^L \xi$  n'est contenue dans aucun sous-groupe parabolique propre de  ${}^L G$  (cette notion se définissant de façon plus ou moins évidente). D'après une conjecture de Langlands,  ${}^L \xi$  détermine une correspondance entre les représentations automorphes discrètes de  $H(\mathbb{A})$  et  $G(\mathbb{A})$ . La méthode envisagée par Langlands pour prouver cette conjecture est de comparer les formules des traces pour les deux groupes (cf. [Lan]; cf. aussi [LL] pour l'application de cette méthode à  $G = SL(2)$ ).

Notons  $C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$  l'espace des fonctions sur  $G(\mathbb{A})$ , à valeurs complexes, à support compact et lisses, c'est-à-dire  $C^\infty$  en les variables réelles et localement constantes en les variables  $p$ -adiques. C'est une algèbre de convolution qui opère dans toute représentation de  $G(\mathbb{A})$ . En particulier, l'opérateur  $\rho^G_{disc}(f)$  est défini pour  $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ . D'après

Müller ([Mü]), c'est un opérateur à trace. On a

$$\text{trace } \rho_{disc}^G(f) = \sum_{\pi} m_{disc}(\pi) \text{trace } \pi(f),$$

où  $\pi$  parcourt les représentations automorphes discrètes de  $G(\mathbb{A})$  et  $m_{disc}(\pi)$  est la multiplicité de  $\pi$ . D'autre part, notons  $G(\mathbb{Q})_{ell}$  le sous-ensemble des éléments semi-simples fortement réguliers et elliptiques de  $G(\mathbb{Q})$  (si  $G = GL(n)$ , ce sont les éléments dont le polynôme caractéristique est irréductible sur  $\mathbb{Q}$ ). Pour  $x \in G(\mathbb{Q})$ , notons  $G_x$  la composante neutre de son commutant dans  $G$ . Pour  $x \in G(\mathbb{Q})_{ell}$  et  $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ , on définit l'intégrale orbitale

$$J_G(x, f) = \int_{G_x(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} f(g^{-1}xg) dg.$$

On pose aussi

$$\text{vol}(x) = \text{mes}(A_G(\mathbb{R})_{>0} G_x(\mathbb{Q}) \backslash G_x(\mathbb{A})).$$

Cela nécessite bien sûr le choix de mesures convenables. Remarquons que, parce que  $x \in G(\mathbb{Q})_{ell}$ ,  $G_x$  est un sous-tore maximal de  $G$  tel que la mesure du quotient ci-dessus soit finie. Fixons un ensemble  $\{G(\mathbb{Q})_{ell}\}$  de représentants des classes de conjugaison par  $G(\mathbb{Q})$  dans  $G(\mathbb{Q})_{ell}$  et posons

$$I_{ell}^G(f) = \sum_{x \in \{G(\mathbb{Q})_{ell}\}} \text{vol}(x) J_G(x, f).$$

La formule des traces, mise au point par Arthur dans une impressionnante suite d'articles, est une égalité  $I_{geom}^G(f) = I_{spec}^G(f)$ , où, très grossièrement

$$I_{geom}^G(f) = I_{ell}^G(f) + \text{termes complémentaires},$$

$$I_{spec}^G(f) = \text{trace } \rho_{disc}^G(f) + \text{termes complémentaires}.$$

Revenons à la donnée endoscopique  $(H, s, {}^L\xi)$ . Le plongement  ${}^L\xi$  détermine, comme on le verra plus loin, une correspondance entre  $\{H(\mathbb{Q})_{ell}\}$  et  $\{G(\mathbb{Q})_{ell}\}$ . On espère qu'il existe une application

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(G(\mathbb{A})) & \rightarrow & C_c^\infty(H(\mathbb{A})) \\ f & \mapsto & f^H, \end{array}$$

appelée le transfert, telle que l'on puisse comparer  $I_{ell}^G(f)$  et  $I_{ell}^H(f^H)$ . En utilisant les formules des traces, on doit aussi pouvoir comparer  $\text{trace } \rho_{disc}^G(f)$  et  $\text{trace } \rho_{disc}^H(f^H)$  et en déduire l'existence et les propriétés de la correspondance conjecturale entre représentations automorphes discrètes de  $H(\mathbb{A})$  et  $G(\mathbb{A})$ . La mise au point de ce grossier schéma de démonstration a déjà nécessité 30 ans de travail et encore loin d'être terminée. Toutefois, un ingrédient de la preuve est maintenant (presque) entièrement au point, grâce à Ngo Bao Chau : c'est l'existence et les propriétés du transfert  $f \mapsto f^H$ . C'est ce que nous nous proposons d'expliquer dans ce texte.

## 2 Conjugaison stable

Dorénavant, le corps de base  $F$  est un corps local non archimédien de caractéristique nulle, c'est-à-dire une extension finie d'un corps  $\mathbb{Q}_p$  de nombres  $p$ -adiques.

**Remarque.** On exclut ainsi le corps des réels, où les choses se passent un peu différemment. Bien sûr, il est aussi nécessaire de traiter ce cas, on en dira quelques mots au paragraphe 5.

Soit  $G$  un groupe réductif connexe défini sur  $F$ . On fixe une clôture algébrique  $\bar{F}$  de  $F$ . On définit maintenant le  $L$ -groupe de  $G$  comme  ${}^L G = \hat{G} \rtimes W_F$ , où  $W_F$  est le groupe de Weil de  $F$ , qui est un sous-groupe dense de  $Gal(\bar{F}/F)$ . On définit comme dans l'introduction, en remplaçant  $\mathbb{Q}$  par  $F$ , la notion de donnée endoscopique de  $G$ . En fait, une définition un peu plus générale est possible, mais nous nous en tiendrons à celle-là. Soit  $(H, s, {}^L \xi)$  une donnée endoscopique de  $G$ . Fixons des sous-tores maximaux  $T^G$  de  $G$  et  $T^H$  de  $H$ , définis sur  $\bar{F}$ , notons  $W^G$  et  $W^H$  les groupes de Weyl relatifs à ces tores. Le plongement  ${}^L \xi$  permet d'identifier un tore maximal  $\hat{T}^H$  de  $\hat{H}$  à un tore maximal  $\hat{T}^G$  de  $\hat{G}$  et le groupe de Weyl de  $\hat{H}$  relatif à  $\hat{T}^H$  à un sous-groupe du groupe de Weyl de  $\hat{G}$  relatif à  $\hat{T}^G$ . Dualement, on en déduit un isomorphisme  $\xi : T^H \rightarrow T^G$  qui identifie  $W^H$  à un sous-groupe de  $W^G$ . D'où une application de  $T^H(\bar{F})/W^H$  dans  $T^G(\bar{F})/W^G$ . Ces quotients paramètrent les classes de conjugaison d'éléments semi-simples dans  $H(\bar{F})$  et dans  $G(\bar{F})$ . On a ainsi une application entre ces deux ensembles de classes de conjugaison. On a beaucoup mieux en utilisant les structures sur  $F$  de nos deux groupes. Notons  $G_{reg}$  le sous-ensemble des éléments semi-simples fortement réguliers de  $G$  et  $H_{G-reg}$  le sous-ensemble des éléments semi-simples et  $G$ -fortement réguliers de  $H$ , c'est-à-dire ceux dont la classe correspond par l'application précédente à une classe d'éléments de  $G_{reg}$ . On dit que deux éléments  $x$  et  $x'$  de  $G_{reg}(F)$  sont stablement conjugués si et seulement s'ils sont conjugués par un élément de  $G(\bar{F})$ . Une classe de conjugaison stable se décompose en union disjointe d'un nombre fini de classes de conjugaison par  $G(F)$ . Plus précisément, soit  $x \in G_{reg}(F)$ , notons  $G_x$  son commutant dans  $G$  (c'est un sous-tore maximal de  $G$ ), introduisons le noyau  $\mathcal{E}_x$  de l'application naturelle entre ensembles de cohomologie

$$H^1(Gal(\bar{F}/F), G_x(\bar{F})) \rightarrow H^1(Gal(\bar{F}/F), G(\bar{F})).$$

C'est un groupe. L'ensemble des classes de conjugaison par  $G(F)$  contenues dans la classe de conjugaison stable  $C^{G,st}(x)$  de  $x$  est un espace principal homogène sous ce groupe  $\mathcal{E}_x$ . L'application définie ci-dessus se précise en une correspondance entre l'ensemble des classes de conjugaison stable contenues dans  $H_{G-reg}(F)$  et l'ensemble des classes de conjugaison stable contenues dans  $G_{reg}(F)$ . A une classe de conjugaison stable dans  $H_{G-reg}(F)$  correspond au plus une classe de conjugaison stable dans  $G_{reg}(F)$ . A une classe de conjugaison stable dans  $G_{reg}(F)$  correspond un nombre fini (peut-être nul) de classes de conjugaison stable dans  $H_{G-reg}(F)$ . Plus précisément, soient  $y \in H_{G-reg}(F)$  et  $x \in G_{reg}(F)$ , supposons que  $C^{H,st}(y)$  et  $C^{G,st}(x)$  se correspondent. Il y a un unique isomorphisme de  $H_y$  sur  $G_x$  qui envoie  $y$  sur  $x$ . L'élément  $({}^L \xi)^{-1}(s)$  est central dans  $\hat{H}$  et appartient donc au tore dual de  $H_y$ . Via l'isomorphisme précédent et la dualité de Tate-Nakayama, il définit un caractère de  $H^1(Gal(\bar{F}/F), G_x(\bar{F}))$ , qui se restreint en un caractère de  $\mathcal{E}_x$  que l'on note  $\kappa_y$ . Il ne dépend que de la classe  $C^{H,st}(y)$ . Supposons  $x$  elliptique, c'est-à-dire que le plus grand sous-tore de  $G_x$  déployé sur  $F$  est contenu dans le centre de  $G$ . Quand  $(H, s, {}^L \xi)$  décrit les données endoscopiques elliptiques de  $G$  et  $y$  décrit les éléments de  $H_{G-reg}(F)$  tels que  $C^{H,st}(y)$  et  $C^{G,st}(x)$  se correspondent, les

données  $(H, s, {}^L\xi)$  et  $y$  étant pris à une équivalence convenable près, les caractères  $\kappa_y$  décrivent exactement le groupe dual de  $\mathcal{E}_x$ .

**Exemple.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $V_{2n+1}$  un espace vectoriel de dimension  $2n + 1$  sur  $F$ , muni d'une base  $(v_i)_{i=-n, \dots, n}$ . Définissons une forme quadratique  $q_{2n+1}$  sur  $V_{2n+1}$  par

$$q_{2n+1}\left(\sum_{i=-n, \dots, n} x_i v_i\right) = x_0^2 + 2 \sum_{i=1, \dots, n} x_i x_{-i}.$$

Notons  $SO(2n + 1)$  le groupe spécial orthogonal de  $(V_{2n+1}, q_{2n+1})$ . Son groupe dual est le groupe symplectique  $Sp(2n, \mathbb{C})$ . Les éléments  $s$  de ce groupe dual donnant naissance à des données endoscopiques elliptiques de  $G = SO(2n + 1)$  sont ceux dont les valeurs propres sont  $\pm 1$ . Pour un tel  $s$ , ayant  $2n'$  valeurs propres 1 et  $2n''$  valeurs propres  $-1$ , avec  $n' + n'' = n$ , le commutant de  $s$  dans  $Sp(2n, \mathbb{C})$  est  $Sp(2n', \mathbb{C}) \times Sp(2n'', \mathbb{C})$ . Ainsi  $s$  s'insère dans une donnée endoscopique elliptique  $(H, s, {}^L\xi)$  pour laquelle  $H = SO(2n' + 1) \times SO(2n'' + 1)$ . En fait, les données obtenues en échangeant  $n'$  et  $n''$  sont équivalentes. Les groupes endoscopiques elliptiques de  $G$  sont donc les groupes  $H = SO(2n' + 1) \times SO(2n'' + 1)$ , pour  $n' + n'' = n$ , à permutation près des deux facteurs. Soit  $x \in G_{reg}(F)$ . En tant qu'endomorphisme de  $V_{2n+1}$ ,  $x$  a  $2n + 1$  valeurs propres dans  $\bar{F}$ , toutes distinctes, et l'une d'elles est 1. Notons  $\Lambda(x)$  le sous-ensemble des  $2n$  valeurs propres différentes de 1. Considérons le groupe endoscopique  $H = SO(2n' + 1) \times SO(2n'' + 1)$ , soit  $y = (y', y'') \in SO(2n' + 1, F) \times SO(2n'' + 1, F) = H(F)$ , supposons  $y \in H_{G-reg}(F)$ . On définit de même  $\Lambda(y')$  et  $\Lambda(y'')$ . Alors les classes de conjugaison stable de  $y$  et  $x$  se correspondent si et seulement si  $\Lambda(x) = \Lambda(y') \cup \Lambda(y'')$ . Soit  $E$  l'extension quadratique non ramifiée de  $F$ , notons  $\tau$  l'élément non trivial du groupe de Galois  $Gal(E/F)$ . Fixons une famille  $a = (a_1, \dots, a_n) \in E^n$ . On suppose  $a_i \tau(a_i) = 1$  et  $a_i \neq \tau(a_i)$  pour tout  $i$  et  $a_i \neq a_j$  et  $a_i \neq \tau(a_j)$  pour tous  $i \neq j$ . Notons  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^n$  le groupe des familles  $e = (e_1, \dots, e_n) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$  telles que  $\sum_{i=1, \dots, n} e_i = 0$ . Soit  $e = (e_1, \dots, e_n) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^n$ , identifions chaque  $e_i$  à un élément de  $\{0, 1\}$ . Fixons une uniformisante  $\varpi_F$  de  $F$ . Pour  $\alpha \in F^\times$ , considérons l'espace  $V_{e, \alpha} = F \oplus E^n$  muni de la forme quadratique  $q_{e, \alpha}$  définie par  $q_{e, \alpha}(z + \sum_{i=1, \dots, n} z_i) = \alpha z^2 + \sum_{i=1, \dots, n} \varpi_F^{e_i} Norme_{E/F}(z_i)$ . Il existe  $\alpha(e) \in F^\times$ , unique modulo le groupe des carrés  $F^{\times 2}$ , tel qu'il existe un isomorphisme  $F$ -linéaire de  $V_{e, \alpha(e)}$  sur  $V_{2n+1}$  transportant la forme  $q_{e, \alpha(e)}$  en la forme  $q_{2n+1}$ . On fixe un tel  $\alpha(e)$  et un tel isomorphisme. Considérons l'élément du groupe spécial orthogonal de  $(V_{e, \alpha(e)}, q_{e, \alpha(e)})$  qui agit par

$$\left(z + \sum_{i=1, \dots, n} z_i\right) \mapsto \left(z + \sum_{i=1, \dots, n} a_i z_i\right).$$

Via l'isomorphisme précédent, il devient un élément de  $G(F)$  que l'on note  $x_e$ . La classe de conjugaison de cet élément ne dépend pas des choix effectués. Quand on fait varier  $e$ , tous ces éléments sont stablement conjugués. Notons  $C_a^{st}$  leur classe de conjugaison stable commune. Alors la famille  $(x_e)_{e \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^n}$  est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par  $G(F)$  contenues dans  $C_a^{st}$ . Le groupe abélien associé à la classe de conjugaison stable  $C_a^{st}$  est  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^n$ . Soit  $\{1, \dots, n\} = I' \sqcup I''$  une partition en deux sous-ensembles. Notons  $n'$  et  $n''$  les nombres d'éléments de  $I'$  et  $I''$ . Soit  $a(I') \in E^{n'}$  la famille formée des  $a_i$ , pour  $i \in I'$ , rangés dans un ordre quelconque. Soit de même  $a(I'') \in E^{n''}$ . On leur associe des classes de conjugaison stable  $C_{a(I')}^{st}$  dans  $SO(2n' + 1, F)$  et  $C_{a(I'')}^{st}$  dans  $SO(2n'' + 1, F)$ . Posons  $H = SO(2n' + 1) \times SO(2n'' + 1)$ . Alors les classes de conjugaison stable  $C_{a(I')}^{st} \times C_{a(I'')}^{st}$  de  $H(F)$  et  $C_a^{st}$  de  $G(F)$  se correspondent. Quand on fait varier la décomposition  $\{1, \dots, n\} = I' \sqcup I''$ , on obtient par ce procédé toutes les classes de

conjugaison stable de groupes endoscopiques elliptiques de  $G$  qui correspondent à  $C_a^{st}$ . Pour  $y = (y', y'') \in C_{a(I')}^{st} \times C_{a(I'')}^{st}$ , le caractère associé  $\kappa_y$  de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$  vérifie l'égalité

$$\kappa_y(e_1, \dots, e_n) = \prod_{i \in I''} (-1)^{e_i} = \prod_{i \in I'} (-1)^{e_i}.$$

### 3 Définition du transfert

Revenons à la situation générale. On note par des lettres gothiques minuscules les algèbres de Lie :  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie de  $G$  etc... Pour  $f \in C_c^\infty(G(F))$  et  $x \in G_{reg}(F)$ , on définit l'intégrale orbitale

$$J_G(x, f) = D^G(x)^{1/2} \int_{G_x(F) \backslash G(F)} f(g^{-1}xg) dg,$$

où  $D^G(x)$  est la valeur absolue du déterminant de  $1 - ad(x)$  agissant sur  $\mathfrak{g}(F)/\mathfrak{g}_x(F)$ . Cette définition nécessite de choisir des mesures de Haar sur  $G(F)$  et  $G_x(F)$ . Dans la suite, on aura besoin de mesures de Haar sur d'autres groupes. On suppose choisies toutes ces mesures. Pour que certaines définitions aient un sens raisonnable, a fortiori pour que les résultats énoncés soient corrects, ces mesures doivent vérifier certaines relations de compatibilité. On suppose celles-ci vérifiées, sans en dire davantage.

Répétons que l'ensemble des classes de conjugaison par  $G(F)$  contenues dans  $C^{G, st}(x)$  est un espace principal homogène sous  $\mathcal{E}_x$ . On peut donc indexer naturellement par ce groupe une famille  $(x_e)_{e \in \mathcal{E}_x}$  de représentants de ces classes de conjugaison par  $G(F)$ , de sorte que  $x = x_0$ . Pour un caractère  $\kappa$  de  $\mathcal{E}_x$ , on pose

$$J_G^\kappa(x, f) = \sum_{e \in \mathcal{E}_x} \kappa(e) J_G(x_e, f).$$

Dans le cas particulier  $\kappa = 1$ , on note plutôt

$$J_G^{st}(x, f) = \sum_{e \in \mathcal{E}_x} J_G(x_e, f).$$

Soient maintenant  $(H, s, {}^L\xi)$  une donnée endoscopique de  $G$ ,  $f \in C_c^\infty(G(F))$  et  $f^H \in C_c^\infty(H(F))$ . On a envie de dire que  $f^H$  est un transfert de  $f$  si on a l'égalité  $J_H^{st}(y, f^H) = J_G^{\kappa_y}(x, f)$  pour tout couple d'éléments  $(y, x) \in H_{G-reg}(F) \times G_{reg}(F)$  tels que  $C^{H, st}(y)$  et  $C^{G, st}(x)$  se correspondent. On voit tout de suite que cette définition est trop rudimentaire car  $J_G^{\kappa_y}(x, f)$  dépend du choix du point-base  $x$  dans la classe  $C^{G, st}(x)$  tandis que  $J_H^{st}(y, f^H)$  n'en dépend pas. Pour poser une définition correcte, on doit utiliser un facteur de transfert. Il s'agit d'une fonction

$$\Delta_{H, G} : H_{G-reg}(F) \times G_{reg}(F) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- (i)  $\Delta_{H, G}(y, x)$  ne dépend que de la classe de conjugaison stable de  $y$  et de la classe de conjugaison de  $x$  par  $G(F)$  ;
- (ii)  $\Delta_{H, G}(y, x) \neq 0$  si et seulement si les classes de conjugaison stable  $C^{H, st}(y)$  et  $C^{G, st}(x)$  se correspondent ;

(iii) soient  $y$  et  $x$  vérifiant cette dernière condition ; introduisons comme ci-dessus une famille  $(x_e)_{e \in \mathcal{E}_x}$  de représentants des classes de conjugaison par  $G(F)$  dans  $C^{G, st}(x)$ , avec  $x = x_0$  ; alors on a l'égalité  $\Delta_{H,G}(y, x_e) = \kappa_y(e) \Delta_{H,G}(y, x)$  pour tout  $e \in \mathcal{E}_x$ .

Le facteur de transfert  $\Delta_{H,G}$  vérifie d'autres conditions, d'une part des conditions de "non ramification" dans le cas où la situation est non ramifiée (voir la section suivante), d'autre part une formule de produit lorsqu'on part d'une situation définie sur un corps de nombres. Il n'est pas clair pour moi de savoir si les conditions que l'on vient d'énumérer suffisent à caractériser le facteur de transfert. En tout cas, Langlands et Shelstad ont défini dans [LS1] un facteur de transfert qui répond à notre attente. Plus exactement, dans le cas le plus général, il n'est défini qu'à un scalaire près : on peut remplacer  $\Delta_{H,G}$  par  $c \Delta_{H,G}$ , où  $c \in \mathbb{C}^\times$ . Toutefois, si  $G$  est quasi-déployé, le choix d'un épinglage de  $G$  défini sur  $F$  permet de le normaliser (cela s'étend d'ailleurs au cas où  $G$  se déduit d'un groupe quasi-déployé par un torseur à valeurs dans  $G$  et non pas dans le groupe adjoint  $G_{ad}$ ).

Supposons fixé le facteur de transfert. Pour  $f \in C_c^\infty(G(F))$  et  $y \in H_{G-reg}(F)$ , on définit

$$J_{H,G}(y, f) = \sum_x \Delta_{H,G}(y, x) J_G(x, f),$$

où  $x$  parcourt  $G_{reg}(F)$  modulo conjugaison par  $G(F)$  (en fait, seuls contribuent les éléments d'au plus une classe de conjugaison stable). On peut maintenant poser la définition correcte suivante.

**Définition.** Soient  $f \in C_c^\infty(G(F))$  et  $f^H \in C_c^\infty(H(F))$ . On dit que  $f^H$  est un transfert de  $f$  si et seulement si  $J_H^{st}(y, f^H) = J_{H,G}(y, f)$  pour tout  $y \in H_{G-reg}(F)$ .

## 4 Le théorème de Ngo Bao Chau

Une attention particulière doit être portée au cas non ramifié. En effet, revenons un instant à la situation de l'introduction où les groupes  $G$  et  $H$  sont définis sur  $\mathbb{Q}$ . Pour presque tout nombre premier  $p$ ,  $G$  et  $H$  sont définis sur  $\mathbb{Z}_p$  et les groupes  $G(\mathbb{Z}_p)$  et  $H(\mathbb{Z}_p)$  sont des sous-groupes compacts maximaux de  $G(\mathbb{Q}_p)$  et  $H(\mathbb{Q}_p)$ , hyperspéciaux au sens de la théorie de Bruhat-Tits. Notons  $f_{p,0}$  et  $f_{p,0}^H$  les fonctions caractéristiques de ces sous-groupes. Pour  $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ , il y a un ensemble fini  $S$  de places de  $\mathbb{Q}$  tel que  $f = f_S \otimes (\otimes_{p \notin S} f_{p,0})$ , où  $f_S \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}_S))$  (avec  $\mathbb{A}_S = \prod_{v \in S} \mathbb{Q}_v$ ). Une décomposition analogue vaut pour une fonction  $f^H \in C_c^\infty(H(\mathbb{A}))$ . Si l'on veut trouver une fonction  $f^H$  qui soit un transfert de  $f$ , il est nécessaire que, pour presque tout  $p$ ,  $f_{p,0}^H$  soit un transfert de  $f_{p,0}$ .

Revenons au cas local, supposons  $G$  non ramifié sur  $F$ , c'est-à-dire que  $G$  est quasi-déployé sur  $F$  et se déploie sur une extension non ramifiée de  $F$ . Notons  $\mathfrak{o}_F$  l'anneau des entiers de  $F$ ,  $\mathbb{F}_q$  le corps résiduel et  $Fr$  l'élément de Frobenius de  $Gal(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ . La forme non ramifiée du  $L$ -groupe de  $G$  est  $\hat{G} \rtimes Fr^{\mathbb{Z}}$ . Soit  $(H, s, {}^L\xi)$  une donnée endoscopique de  $G$ , non ramifiée, c'est-à-dire que  $H$  est non ramifié et que  ${}^L\xi$  se quotiente en un homomorphisme entre les formes non ramifiées des  $L$ -groupes de  $H$  et  $G$ . Fixons des sous-groupes compacts maximaux hyperspéciaux  $K$  de  $G(F)$  et  $K^H$  de  $H(F)$ . Notons  $\mathbf{1}_K$  et  $\mathbf{1}_{K^H}$  leurs fonctions caractéristiques. On normalise les mesures sur  $G(F)$  et  $H(F)$

par  $mes(K) = mes(K^H) = 1$ . Le choix de  $K$  permet de normaliser le facteur de transfert  $\Delta_{H,G}$ . Dans le cas où la caractéristique résiduelle  $p$  de  $F$  est grande, relativement à la dimension de  $G$ , la méthode est simple. D'après Bruhat-Tits,  $G$  est muni d'une structure de schéma en groupes lisse sur  $\mathfrak{o}_F$ , telle que  $K = G(\mathfrak{o}_F)$ . Il y a une projection naturelle  $x \mapsto \bar{x}$  de  $K$  sur  $G(\mathbb{F}_q)$ . Considérons l'ensemble des couples  $(y, x) \in H_{G-reg}(F) \times G_{reg}(F)$  tels que  $C^{H,st}(y)$  et  $C^{G,st}(x)$  se correspondent,  $y \in K^H$ ,  $x \in K$  et la réduction  $\bar{x} \in G(\mathbb{F}_q)$  est semi-simple et fortement régulière. Si  $p$  est assez grand, cet ensemble est non vide. On peut choisir  $\Delta_{H,G}$  tel que  $\Delta_{H,G}(y, x) = 1$  pour tout élément  $(y, x)$  de cet ensemble. Pour ces normalisations, la question est de savoir si  $\mathbf{1}_{K^H}$  est un transfert de  $\mathbf{1}_K$ .

Plus généralement, notons  $\mathcal{H}^K$  l'algèbre de convolution des fonctions sur  $G(F)$ , à support compact et biinvariantes par  $K$ . Définissons de même  $\mathcal{H}^{K^H}$ . L'isomorphisme de Satake identifie  $\mathcal{H}^K$  à l'algèbre des fonctions polynomiales sur  $\hat{G} \times \{Fr\} \subset \hat{G} \rtimes Fr^{\mathbb{Z}}$ , invariantes par conjugaison par  $\hat{G}$ . De même pour  $\mathcal{H}^{K^H}$ . L'application image réciproque par le plongement  ${}^L\xi : \hat{H} \times \{Fr\} \rightarrow \hat{G} \times \{Fr\}$  définit un homomorphisme  $b : \mathcal{H}^K \rightarrow \mathcal{H}^{K^H}$ . En particulier  $b(\mathbf{1}_K) = \mathbf{1}_{K^H}$ . La question est de savoir si, pour  $f \in \mathcal{H}^K$ ,  $b(f)$  est un transfert de  $f$ . Cette question est maintenant résolue.

**Théorème (lemme fondamental).** *Pour tout  $f \in \mathcal{H}^K$ ,  $b(f)$  est un transfert de  $f$ . En particulier,  $\mathbf{1}_{K^H}$  est un transfert de  $\mathbf{1}_K$ .*

Le premier pas de la démonstration, dû à Clozel, Labesse et Hales ([C], [Lab], [H1]) est de ramener la première assertion à la seconde. La méthode est locale-globale. La deuxième est de ramener cette seconde assertion à l'assertion analogue pour les algèbres de Lie ([H2]). En effet, la plupart des définitions se descendent aux algèbres de Lie. D'après Bruhat-Tits, aux sous-groupes compacts  $K^H$  et  $K$  sont associées des sous- $\mathfrak{o}_F$ -algèbres de Lie  $\mathfrak{k}^H$  et  $\mathfrak{k}$  de  $\mathfrak{h}(F)$  et  $\mathfrak{g}(F)$ , que l'on peut appeler hyperspéciales. Notons  $\mathbf{1}_{\mathfrak{k}^H}$  et  $\mathbf{1}_{\mathfrak{k}}$  leurs fonctions caractéristiques. Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie affirme que  $\mathbf{1}_{\mathfrak{k}^H}$  est un transfert de  $\mathbf{1}_{\mathfrak{k}}$ . Signalons en passant que Kottwitz a trouvé un moyen très simple de définir le facteur de transfert pour les algèbres de Lie à l'aide de sections de Kostant ([Ko1]). La troisième étape est de montrer que l'on peut remplacer le corps  $F$  de caractéristique nulle par un corps local de caractéristique positive ([W1], [CHL]). Il reste la dernière étape, de loin la plus difficile : prouver le lemme fondamental pour les algèbres de Lie sur un corps local de caractéristique positive. C'est le résultat décisif de Ngo Bao Chau ([N]). La méthode est géométrique et s'inscrit dans un courant d'idées introduit par Springer dans la construction des représentations qui portent son nom. La géométrie a été introduite dans le sujet par Kottwitz, Goresky et MacPherson ([GKM]), puis par Laumon et Ngo Bao Chau ([LN]).

## 5 Existence du transfert

Revenons à la situation générale où  $G$  et sa donnée endoscopique  $(H, s, {}^L\xi)$  ne sont plus supposés non ramifiés.

**Théorème (conjecture de transfert).** *Pour tout  $f \in C_c^\infty(G(F))$ , il existe une fonction  $f^H \in C_c^\infty(H(F))$  qui est un transfert de  $f$ .*

Langlands et Shelstad ont montré dans [LS2] que cette assertion résultait de l'assertion analogue pour les algèbres de Lie. J'ai prouvé que celle-ci résultait du lemme fondamental pour les algèbres de Lie ([W2]). Le théorème ci-dessus est donc une conséquence de celui de Ngo Bao Chau.

Pour les algèbres de Lie, le transfert vérifie une intéressante propriété de compatibilité à la transformation de Fourier. Fixons un caractère continu non trivial  $\psi : F \rightarrow \mathbb{C}$  et une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$  sur  $\mathfrak{g}(F) \times \mathfrak{g}(F)$ , invariante par l'action adjointe de  $G(F)$ . Le plongement  ${}^L\xi$  permet d'en déduire une forme analogue  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}}$  sur  $\mathfrak{h}(F) \times \mathfrak{h}(F)$ . Dans le cas de l'exemple du paragraphe 2, on peut prendre  $\langle X_1, X_2 \rangle_{\mathfrak{g}} = \text{trace}(X_1 X_2)$  pour  $X_1, X_2 \in \mathfrak{so}(2n+1, F) \subset \text{End}(V_{2n+1})$  et alors  $\langle Y_1' + Y_1'', Y_2' + Y_2'' \rangle_{\mathfrak{h}} = \text{trace}(Y_1' Y_2') + \text{trace}(Y_1'' Y_2'')$  pour  $Y_1', Y_2' \in \mathfrak{so}(2n'+1, F)$  et  $Y_1'', Y_2'' \in \mathfrak{so}(2n''+1, F)$ . On définit la transformation de Fourier  $f \mapsto \hat{f}$  dans  $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$  par

$$\hat{f}(X) = \int_{\mathfrak{g}(F)} f(Z) \psi(\langle Z, X \rangle_{\mathfrak{g}}) dZ,$$

où  $dZ$  est la mesure autoduale. On définit de même la transformation de Fourier dans  $C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$ .

**Proposition .** *Il existe  $\gamma \in \mathbb{C}^\times$  tel que  $\gamma^4 = 1$  et que la propriété suivante soit vérifiée. Soient  $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$  et  $f^H \in C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$ . Supposons que  $f^H$  soit un transfert de  $f$ . Alors  $\gamma(f^H)^\wedge$  est un transfert de  $\hat{f}$ .*

Cf. [W3], paragraphe VIII.7, conjecture 1.

La question de l'existence du transfert doit être aussi posée quand le corps de base est réel. Les principales définitions s'adaptent à ce cas (plusieurs ont même été posées dans le cas réel avant d'être étendues au cas  $p$ -adique). Le théorème ci-dessus reste vrai. Il est alors dû à Shelstad ([S]). Le cas du corps de base complexe est trivial.

## 6 Intégrales orbitales pondérées

En fait, le transfert et le lemme fondamental ne suffisent pas à comparer des formules de traces. Dans l'introduction, on a très grossièrement négligé les "termes complémentaires" apparaissant dans  $I_{geom}^G(f)$ . Ceux-ci contiennent des intégrales orbitales pondérées, cf. ci-dessous. Pour la raison expliquée au paragraphe 4, il est nécessaire, dans le cas non ramifié, de comparer les intégrales orbitales pondérées des fonctions  $\mathbf{1}_K$  et  $\mathbf{1}_{K^H}$ .

Provisoirement,  $G$  est quelconque. Appelons Lévi de  $G$  un sous-groupe  $M$  de  $G$  défini sur  $F$  tel qu'il existe un sous-groupe parabolique  $P$  de  $G$ , défini sur  $F$ , dont  $M$  soit une composante de Lévi. Fixons un Lévi minimal  $M_0$  de  $G$  et un sous-groupe compact maximal spécial  $K$  de  $G(F)$ , en bonne position relativement à  $M_0$  (précisément,  $K$  fixe un point de l'appartement, dans l'immeuble de  $G$ , associé au sous-tore déployé maximal de  $M_0$ ). Soit  $M$  un Lévi de  $G$  contenant  $M_0$ . Alors Arthur définit une fonction  $v_M : G(F) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  qui est invariante à gauche par  $M(F)$  et à droite par  $K$ .

**Exemple.** Supposons que  $G = SL(2)$ ,  $K = SL(2, \mathfrak{o}_F)$  et que  $M_0$  soit le tore diagonal. Tout élément  $g \in G(F)$  s'écrit  $g = ank$ , avec  $a \in M_0(F)$ ,  $k \in K$  et

$$n = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors  $v_M(g) = c \sup(0, -\text{val}_F(b))$ , où  $c > 0$  est une constante explicite et  $\text{val}_F$  est la valuation usuelle de  $F$ .

Soient  $x \in M(F) \cap G_{\text{reg}}(F)$  et  $f \in C_c^\infty(G(F))$ . On définit l'intégrale orbitale pondérée

$$J_M(x, f) = D^G(x)^{1/2} \int_{G_x(F) \backslash G(F)} f(g^{-1}xg) v_M(g) dg.$$

Supposons maintenant  $G$  non ramifié et  $K$  hyperspécial. Soit  $(M', s^M, L\xi^M)$  une donnée endoscopique elliptique de  $M$ , non ramifiée. On définit de façon plus ou moins évidente l'ensemble  $M'_{G-\text{reg}}$ , puis une fonction  $r_{M'}^G$  sur  $M'_{G-\text{reg}}(F)$  par

$$r_{M'}^G(y) = \sum \Delta_{M', M}(y, x) J_M(x, \mathbf{1}_K),$$

où  $x$  parcourt  $M_{G-\text{reg}}(F)$  modulo conjugaison par  $M(F)$ . Dans le cas particulier où  $M = G$ ,  $M'$  est un groupe endoscopique de  $G$  que l'on peut plutôt noter  $G'$  et le lemme fondamental pour les fonctions  $\mathbf{1}_K$  et  $\mathbf{1}_{K^{G'}}$  se reformule par l'égalité  $r_{G'}^G = r_{G'}^{G'}$ . Le cas général est plus compliqué car il fait intervenir plusieurs groupes endoscopiques de  $G$ . Notons  $Z(\hat{M})^{\text{Gal}(\bar{F}/F)}$ , resp.  $Z(\hat{G})^{\text{Gal}(\bar{F}/F)}$ , le sous-groupe des éléments du centre de  $\hat{M}$ , resp.  $\hat{G}$ , qui sont fixés par l'action du groupe de Galois. Pour tout  $s \in s^M Z(\hat{M})^{\text{Gal}(\bar{F}/F)} / Z(\hat{G})^{\text{Gal}(\bar{F}/F)}$ , on peut construire un groupe  $G'[s]$  dont le groupe dual est la composante neutre du commutant de  $s$  dans  $\hat{G}$ . D'une part, c'est un groupe endoscopique non ramifié de  $G$  et, d'autre part, il contient  $M'$  comme groupe de Lévi. Notons  $\mathcal{E}_{M'}(G)$  le sous-ensemble (fini) des  $s \in s^M Z(\hat{M})^{\text{Gal}(\bar{F}/F)} / Z(\hat{G})^{\text{Gal}(\bar{F}/F)}$  tels que  $G'[s]$  soit un groupe endoscopique elliptique de  $G$ . Le lemme fondamental pondéré affirme que, pour tout couple  $(G'', M'')$  formé d'un groupe  $G''$  non ramifié sur  $F$  et d'un Lévi  $M''$  de  $G''$ , il existe une fonction  $s_{M''}^{G''}$ , définie sur un ouvert dense de  $M''(F)$  que nous ne précisons pas, de sorte que la propriété suivante soit vérifiée. Pour  $G$ ,  $M$  et  $(M', s^M, L\xi^M)$  comme ci-dessus, on a l'égalité

$$r_{M'}^G(y) = \sum_{s \in \mathcal{E}_{M'}(G)} i_{M'}(G, G'[s]) s_{M'}^{G'[s]}(y)$$

pour tout  $y \in M'_{G-\text{reg}}(F)$ , où  $i_{M'}(G, G'[s])$  est une constante explicite. Cf. [Ar1], conjecture 5.1. Signalons que la fonction  $s_M^G$  est uniquement déterminée par récurrence sur la dimension de  $G$  par cette égalité appliquée au cas  $M' = M$ .

**Exemple.** Supposons  $G = SO(9)$ ,  $M = SO(7) \times GL(1)$ ,  $M' = SO(5) \times SO(3) \times GL(1)$ . Alors  $\mathcal{E}_{M'}(G)$  a deux éléments. Les deux groupes  $G'[s]$  sont  $SO(5) \times SO(5)$  et  $SO(7) \times SO(3)$ . Le groupe  $M'$  est un Lévi de chacun d'eux, puisque  $SO(3) \times GL(1)$  est un Lévi de  $SO(5)$  et  $SO(5) \times GL(1)$  est un Lévi de  $SO(7)$ .

Comme le lemme fondamental lui-même, sa version pondérée se réduit à l'assertion analogue pour les algèbres de Lie, en caractéristique positive. Celle-ci est annoncée par Chaudouard et Laumon ([CL]) qui utilisent une méthode inspirée par celle de Ngo Bao Chau.

## 7 Endoscopie tordue

On peut généraliser la définition de l'endoscopie de deux façons. D'une part en fixant un caractère  $\chi$  de  $G(F)$ , c'est-à-dire un homomorphisme  $\chi : G(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ , localement constant. Pour  $f \in C_c^\infty(G(F))$  et  $x \in G_{reg}(F)$  tel que  $G_x(F)$  soit contenu dans le noyau de  $\chi$ , on pose

$$J_{G,\chi}(x, f) = D^G(x)^{1/2} \int_{G_x(F) \backslash G(F)} f(g^{-1}xg)\chi(g)dg.$$

On définit de façon appropriée la notion de donnée endoscopique de  $(G, \chi)$ . Pour une telle donnée  $(H, s, {}^L\xi)$ , pour  $y \in H_{G-reg}(F)$  et  $x \in G_{reg}(F)$  tels que  $C^{H,st}(y)$  et  $C^{G,st}(x)$  se correspondent, l'élément  $x$  vérifie la condition ci-dessus (à savoir que  $G_x(F)$  est contenu dans le noyau de  $\chi$ ). On peut répéter les définitions des paragraphes 3 et 4 en remplaçant les intégrales  $J_G(x, f)$  par  $J_{G,\chi}(x, f)$ .

**Exemple 1.** Soient  $E$  une extension finie de  $F$  de degré  $d$ , galoisienne et cyclique, et  $\kappa$  un caractère de  $F^\times$  dont le noyau est le groupe des normes de cette extension. Soit  $m \geq 1$  un entier, posons  $n = md$ ,  $G = GL(n)$  et notons  $\chi$  le caractère  $\kappa \circ \det$  de  $G(F)$ . Introduisons le groupe  $H$  sur  $F$  tel que  $H(F) = GL(m, E)$ . Ce groupe est un groupe endoscopique de  $(G, \chi)$ . Cette situation est parfois appelée "induction automorphe".

On peut aussi fixer un automorphisme  $\theta$  de  $G$ , défini sur  $F$  et semi-simple (cf. ci-dessous). Pour  $x \in G$ , posons  $Z_G(x\theta) = \{g \in G; g^{-1}x\theta(g) = x\}$  et notons  $G_{x\theta}$  la composante neutre de ce groupe. Notons  $G_{\theta-reg}$  le sous-ensemble des éléments  $x \in G$  tels que  $G_{x\theta}$  soit un tore et que  $Z_G(x\theta)$  soit abélien. Pour  $f \in C_c^\infty(G(F))$  et  $x \in G_{\theta-reg}(F)$ , posons

$$J_{G,\theta}(x, f) = D^G(x\theta)^{1/2} [Z_G(x\theta, F) : G_{x\theta}(F)]^{-1} \int_{G_{x\theta}(F) \backslash G(F)} f(g^{-1}x\theta(g))dg,$$

avec une définition convenable de  $D^G(x\theta)$ . A l'automorphisme  $\theta$  est dualement associé un automorphisme  $\hat{\theta}$  de  $\hat{G}$ . On définit la notion de donnée endoscopique de  $(G, \theta)$  essentiellement en remplaçant la condition  ${}^L\xi(\hat{H}) = \hat{G}_s$  par  ${}^L\xi(\hat{H}) = \hat{G}_{s\hat{\theta}}$ , ce dernier groupe étant comme ci-dessus la composante neutre de  $\{y \in \hat{G}; y^{-1}s\hat{\theta}(y) = s\}$ . Il est un peu plus délicat de définir la correspondance entre classes de conjugaison stable car, sur  $\bar{F}$ , un sous-tore maximal de  $H$  ne s'identifie plus à un sous-tore maximal de  $G$ , mais à un quotient d'un tel sous-tore. Précisément, fixons un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$  et un sous-tore maximal  $T$  de  $B$  tels que  $\theta$  conserve  $B$  et  $T$  (on est ici sur  $\bar{F}$ ; dire que  $\theta$  est semi-simple signifie précisément que de tels groupes  $B$  et  $T$  existent). Alors un sous-tore maximal de  $H$  s'identifie à  $T/\{t\theta(t)^{-1}; t \in T\}$ . Quoi qu'il en soit, on peut adapter les définitions des paragraphes 3 et 4 en remplaçant les intégrales  $J_G(x, f)$  par  $J_{G,\theta}(x, f)$  et en utilisant le facteur de transfert défini par Kottwitz et Shelstad ([KS]).

**Exemples 2.** Soient  $E$  une extension finie de  $F$ , galoisienne et cyclique,  $\theta_E$  un générateur du groupe de Galois  $Gal(E/F)$  et  $H$  un groupe réductif connexe défini et quasi-déployé sur  $F$ . On définit un groupe  $G$  sur  $F$ , muni d'un automorphisme  $\theta$ , de sorte que  $G(F) = H(E)$  et que  $\theta$  agisse sur  $G(F)$  comme  $\theta_E$  agit naturellement sur  $H(E)$ . Alors  $H$  est un groupe endoscopique de  $(G, \theta)$ . Cette situation est appelée le changement de base.

**3.**  $G = GL(2n)$ ,  $\theta$  est défini par  $\theta(g) = {}^t g^{-1}$ . Alors  $H = SO(2n+1)$  et  $H = SO(2n)$  sont des groupes endoscopiques de  $(G, \theta)$ .

4.  $G = GL(2n + 1)$ ,  $\theta$  est comme ci-dessus. Alors  $H = Sp(2n)$  et  $H = SO(2n + 1)$  sont des groupes endoscopiques de  $G$ .

5.  $G = SO(8)$ ,  $\theta$  est un automorphisme extérieur d'ordre 3. Alors le groupe simple  $H$  de type  $G_2$  est un groupe endoscopique de  $(G, \theta)$ .

Dans les deux situations dites tordues que l'on vient de décrire se posent les mêmes questions que dans les paragraphes précédents : existence du transfert tordu, lemme fondamental tordu, lemme fondamental pondéré tordu. Les deux premières sont résolues comme on l'indique brièvement ci-dessous. La troisième devrait l'être après les travaux de Chaudouard et Laumon. Signalons que dans le cas de l'exemple 1, le lemme fondamental est connu depuis longtemps ([Ka], [W4]). De même dans le cas de l'exemple 2 ([Ko2], [C], [Lab]).

Dans [W5], j'ai établi le résultat suivant, en utilisant une méthode de descente imitée de [LS2]. L'existence du transfert tordu, resp. le lemme fondamental tordu pour les fonctions  $\mathbf{1}_K$  et  $\mathbf{1}_{KH}$ , se déduisent de deux assertions :

- l'existence du transfert, resp. le lemme fondamental, pour les algèbres de Lie ;
- l'existence du transfert, resp. le lemme fondamental, toujours pour les algèbres de Lie, mais dans une situation "non standard".

Décrivons cette situation non standard. Au lieu d'avoir un groupe  $G$  et un groupe endoscopique  $H$ , on a deux groupes  $G_1$  et  $G_2$ , que l'on peut supposer quasi-déployés, et dont les données de racines sont isomorphes "après tensorisation par  $\mathbb{Q}$ ". C'est-à-dire qu'il y a un homomorphisme défini sur  $F$  entre ces données qui envoie toute racine, resp. coracine, de  $G_1$  sur un multiple rationnel d'une racine, resp. coracine, de  $G_2$ . Le principal exemple est  $G_1 = Sp(2n)$  et  $G_2 = SO(2n + 1)$ , l'homomorphisme venant de l'identification usuelle de leurs tores maximaux avec  $GL(1)^n$ . Dans cette situation, il y a une correspondance entre classes de conjugaison stable dans  $\mathfrak{g}_1(F)$  et dans  $\mathfrak{g}_2(F)$ . On peut poser les mêmes définitions que dans le cas endoscopique, avec un facteur de transfert trivial. Ngo Bao Chau a prouvé le lemme fondamental pour les algèbres de Lie dans cette situation non standard, en même temps que le lemme du cas endoscopique. Avec le résultat de [W5], cela prouve l'existence du transfert tordu et le lemme fondamental tordu pour les fonctions  $\mathbf{1}_K$  et  $\mathbf{1}_{KH}$ .

**Remarques 1.** Considérons les exemples 3 ou 4. Soient  $x \in G(F)$  et  $y \in H(F)$ . Supposons que ces éléments sont semi-simples, pas forcément réguliers, et que leurs classes de conjugaison stable se correspondent (cette notion devant être correctement définie pour des éléments non réguliers). Supposons aussi  $G_{x\theta}$  et  $H_y$  quasi-déployés. Alors ces deux groupes se décomposent en produits finis  $G_{x\theta} = \prod_{i=1, \dots, k} G_i$ ,  $H_y = \prod_{i=1, \dots, k} H_i$  de sorte que, pour tout  $i$ , ou bien  $H_i$  est un groupe endoscopique de  $G_i$ , ou bien les groupes  $G_i$  et  $H_i$  sont en situation non standard. C'est la raison pour laquelle cette situation non standard s'introduit dans l'affaire.

2. La réduction du lemme fondamental pour toute l'algèbre de Hecke au cas des fonctions  $\mathbf{1}_K$  et  $\mathbf{1}_{KH}$  n'a pas été rédigée dans le cas tordu le plus général, du moins à ma connaissance, bien que plusieurs cas particuliers l'aient été ([C] et [Lab] déjà cités, [Mor] proposition 9.5.1).

3. Une méthode similaire s'applique au lemme fondamental pondéré tordu ([W6]). Les lemmes non tordus nécessaires devraient être prouvés par Chaudouard et Laumon.

4. Le lemme fondamental non standard vaut pour les algèbres de Lie, pas pour les groupes. Considérons le cas le plus remarquable du couple  $(Sp(2n), SO(2n + 1))$ . Il y a bel et bien une correspondance naturelle entre les classes de conjugaison stable dans

$Sp(2n, F)$  et dans  $SO(2n+1, F)$ . Mais le lemme fondamental n'est pas vérifié, comme le montre le calcul dans le cas le plus simple  $n = 1$ . On peut tout de même relever le lemme pour les algèbres de Lie en un lemme pour un couple de groupes. En effet,  $Sp(2n, F)$  possède un revêtement à deux feuilletés bien connu, le groupe métaplectique, notons-le  $\tilde{Sp}(2n, F)$ . Il n'est pas algébrique mais a bien sûr, en tant que groupe de Lie, la même algèbre de Lie que  $Sp(2n, F)$ . En utilisant le facteur de transfert défini par Adams ([Ad]), on montre que le couple  $(\tilde{Sp}(2n, F), SO(2n+1, F))$  vérifie un lemme fondamental. C'est l'objet d'un travail en cours de Li.

## 8 Perspectives

Les questions d'analyse harmonique sur les groupes  $p$ -adiques soulevées par la théorie de l'endoscopie, du moins du côté géométrique (en utilisant la terminologie habituelle : géométrique= intégrales orbitales, spectral= caractères de représentations) sont maintenant presque résolues, ainsi qu'on a essayé de l'expliquer. On peut résumer la situation en disant que le sujet est mort.

Il reste du travail à faire du côté spectral, par exemple la description des  $L$ -paquets et des paquets d'Arthur ([Ar2] paragraphe 30, [Moe]). Une extension naturelle de la théorie concerne la formule des traces relative de Jacquet et Rallis, où apparaissent des lemmes fondamentaux de nature un peu différente. Il semble que la méthode de Ngo Bao Chau puisse s'appliquer au moins à certains d'entre eux ([Y]). Bien d'autres questions restent ouvertes, quoiqu'elles apparaissent aujourd'hui un peu gratuites. Par exemple, les intégrales unipotentes et les germes de Shalika qui leurs sont associés, qui sont en fait d'occultes *dei ex machina* de toute la théorie, sont toujours aussi peu compris. Pour nous en tenir aux questions concernant le transfert, disons pour les algèbres de Lie, le lemme fondamental calcule un transfert d'une fonction particulière : la fonction caractéristique d'une sous-algèbre hyperspéciale. On peut poser diverses questions concernant d'autres fonctions naturelles. Par exemple, la fonction caractéristique d'une sous-algèbre parahorique se transfère-t-elle en une combinaison linéaire de telles fonctions? Plus généralement, Moy et Prasad ont défini des  $\mathfrak{o}_F$ -réseaux  $\mathfrak{g}_{x,r}$  de l'algèbre  $\mathfrak{g}(F)$ . Ils sont indexés par un point  $x$  de l'immeuble de  $G$  et un réel  $r \in \mathbb{R}$ . Posons  $\mathfrak{g}_{x,r+} = \bigcup_{r' > r} \mathfrak{g}_{x,r'}$ . C'est un sous-réseau de  $\mathfrak{g}_{x,r}$  et le quotient  $\mathfrak{g}_{x,r}/\mathfrak{g}_{x,r+}$  est fini. Notons  $C(\mathfrak{g}_{x,r}/\mathfrak{g}_{x,r+})$  l'espace des fonctions sur cet ensemble fini. On peut le considérer comme un sous-espace de  $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ , à savoir celui des fonctions à support dans  $\mathfrak{g}_{x,r}$  et invariante par translations par  $\mathfrak{g}_{x,r+}$ . Posons

$$\mathcal{S}_r = \sum_x C(\mathfrak{g}_{x,r}/\mathfrak{g}_{x,r+}) \subset C_c^\infty(\mathfrak{g}(F)).$$

Signalons que, dans le cas non ramifié, la fonction  $\mathbf{1}_{\mathfrak{k}}$  appartient à  $\mathcal{S}_0$ . L'espace  $\mathcal{S}_r$  est stable par l'action naturelle de  $G(F)$ , que l'on note ici  $ad$ . Le quotient

$$\mathcal{S}_r / \{ad(g)f - f; g \in G(F), f \in \mathcal{S}_r\}$$

est fini. Il est tentant de chercher un sous-ensemble fini de  $\mathcal{S}_r$ , dont l'image dans ce quotient soit une base de celui-ci, tel que l'on puisse calculer un transfert de chaque élément du sous-ensemble. Pour  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{S}_r$  est relié à des espaces de fonctions sur des algèbres de Lie de groupes réductifs définis sur  $\mathbb{F}_q$ . La machinerie mise au point par

Lusztig rend l'espace  $\mathcal{S}_r$ , ou plutôt son quotient ci-dessus, plus ou moins compréhensible et la question paraît résoluble (le transfert de la fonction caractéristique d'un faisceau-caractère cuspidal n'est toutefois pas connu, pour autant que je le sache, hors du cas des groupes classiques non ramifiés). Pour  $r$  non entier, la question est à ma connaissance complètement ouverte, bien que les résultats d'homogénéité de DeBacker tendent à prouver que tous les espaces  $\mathcal{S}_r$ , ou plutôt leurs quotients ci-dessus, doivent avoir beaucoup de propriétés communes, que  $r$  soit entier ou non. La question, apparemment (et sans doute faussement) plus simple, du calcul de transferts des seules fonctions caractéristiques des réseaux  $\mathfrak{g}_{x,r}$  est elle-aussi ouverte.

### Bibliographie

- [Ad] J. Adams : *Lifting of characters on orthogonal and metaplectic groups*, Duke Math. J. 92 (1998), p.129-178
- [Ar1] J. Arthur : *A stable trace formula I. General expansions*, J. Inst. Math. Jussieu 1 (2002), p.175-277
- [Ar2] ——— : *An introduction to the trace formula*, in *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, AMS, CMIP4 (2009)
- [CL] P.-H. Chaudouard, G. Laumon : *Le lemme fondamental pondéré I. Constructions géométriques*, arXiv 0902.2684 [AG] (2009)
- [C] L. Clozel : *The fundamental lemma for stable base change*, Duke Math. J. 61 (1990), p.255-302
- [CHL] R. Cluckers, T. Hales, F. Loeser : *Transfer principle for the fundamental lemma*, arXiv 0712.0708 [RT] (2007)
- [GKM] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson : *Homology of affine Springer fiber in the unramified case*, Duke Math. J. 121 (2004), p.509-561
- [H1] T. Hales : *On the fundamental lemma for standard endoscopy : reduction to unit elements*, Can. J. Math. 47 (1995), p.974-994
- [H2] ——— : *A simple definition of transfer factors for unramified groups*, Contemporary Math. 145 (1993), p.109-134
- [Ka] D. Kazhdan : *On lifting*, in *Lie group representations II*, Springer LN 1041 (1984), p.209-249
- [Ko1] R. Kottwitz : *Transfer factors for Lie algebra*, Represent. Theory 3 (1999), p.127-138
- [Ko2] ——— : *Base change for unit elements of Hecke algebras*, Compositio Math. 60 (1986), p.237-250
- [KS] ———, D. Shelstad : *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)
- [Lab] J.-P. Labesse : *Fonctions élémentaires et lemme fondamental pour le changement de base*, Duke Math. J. 61 (1990), p.519-530
- [LL] ———, R.P. Langlands : *L-indistinguishability for  $SL(2)$* , Can. J. Math. 31 (1979), p.726-785
- [Lan] R.P. Langlands : *Les débuts d'une formule des traces stable*, Publ. Math. Univ. Paris VII (1979)
- [LS1] ———, D. Shelstad : *On the definition of transfer factors*, Math. Annalen 278 (1987), p.219-271
- [LS2] ——— : *Descent of transfer factors*, in *The Grothendieck Festschrift II*, Birkhäuser 1991, p.485-563
- [LN] G. Laumon, Ngo Bao Chau : *Le lemme fondamental pour les groupes unitaires*, Annals of Math. 168 (2008), p.477-573

- [Moe] C. Moeglin : *Multiplicité 1 dans les paquets d'Arthur aux places  $p$ -adiques*, à paraître dans un volume en l'honneur de F. Shahidi
- [Mor] S. Morel : *On the cohomology of certain non-compact Shimura varieties*, prépublication (2008)
- [Mü] W. Müller : *The trace class conjecture in the theory of automorphic forms*, Ann. of Math. 130 (1989), p.473-529
- [N] Ngo Bao Chau : *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, arXiv 0801.0446 [AG] (2008)
- [S] D. Shelstad :  *$L$ -indistinguishability for real groups*, Math. Ann. 259 (1982), p.385-430
- [W1] J.-L. Waldspurger : *Endoscopie et changement de caractéristique*, J. Inst. Math. Jussieu 5 (2006), p.423-525
- [W2] ————— : *Le lemme fondamental implique le transfert*, Compositio Math. 105 (1997), p.153-236
- [W3] ————— : *Une formule des traces locale pour les algèbres de Lie  $p$ -adiques*, J. reine angew. Math. 465 (1995), p.41-99
- [W4] ————— : *Sur les intégrales orbitales tordues pour les groupes linéaires : un lemme fondamental*, Can. J. Math. 43 (1991), p.852-896
- [W5] ————— : *L'endoscopie tordue n'est pas si tordue*, Memoirs AMS 908 (2008)
- [W6] ————— : *A propos du lemme fondamental pondéré tordu*, Math. Ann. 343 (2009), p.103-174
- [Y] Z. Yun : *The fundamental lemma of Jacquet-Rallis in positive characteristics*, arXiv 0901.0900 [AG] ( 2009)

CNRS-Institut de Mathématiques de Jussieu  
 175, rue du Chevaleret  
 75013 Paris  
 e-mail : waldspur@math.jussieu.fr