Clay Mathematics Proceedings
Volume 8, 2009

Galois + Équidistribution = Manin-Mumford

Nicolas Ratazzi et Emmanuel Ullmo

Résumé. Ce texte est une version rédigée du premier exposé donné par le second auteur durant l'école d'été "Arithmetic Geometry" à l'université de Göttingen à l'été 2006. Les exposés avaient pour but de donner une idée de la preuve récente de la conjecture d'André–Oort sous l'hypothèse de Riemann généralisée due à Klingler, Yafaev et le second auteur.

1. Introduction

Le texte qui suit est une version rédigée du premier exposé donné par le second auteur durant l'école d'été "Arithmetic Geometry" à l'université de Göttingen à l'été 2006. C'est un plaisir d'avoir l'occasion de remercier les organisateurs pour leur invitation. Les exposés avaient pour but de donner une idée de la preuve récente de la conjecture d'André–Oort sous l'hypothèse de Riemann généralisée due à Klingler, Yafaev et le second auteur [**UY06**], [**KY06**].

La conjecture d'André–Oort est un analogue pour les variétés de Shimura de la conjecture de Manin-Mumford démontré par Raynaud [**Ray83**]. Il était donc naturel d'essayer d'adapter la stratégie de preuve de la conjecture d'André-Oort dans le cas des variétés abéliennes. Le texte qui suit propose cette traduction et donne donc une démonstration de la conjecture de Manin-Mumford.

Rappelons tout d'abord l'énoncé de la conjecture de Manin-Mumford.

Théorème 1.1. *Soient K un corps de nombres, A/K une variété abélienne sur K et V/K une sous-variété géométriquement irréductible de A. Si $V(\overline{K})$ contient un ensemble de points de torsion dense dans V pour la topologie de Zariski alors V est un translaté par un point de torsion d'une sous-variété abélienne.*

De nombreuses preuves de cette conjecture ont été obtenues. La première preuve donnée par Raynaud [**Ray83**] utilise des méthodes p-adiques. Hindry [**Hin88**] donne une preuve utilisant la théorie de Galois et l'approximation diophantienne. Hrushovski montre la conjecture en utilisant des idées provenant de la logique (théorie des modèles des corps). Pink et Roessler [**PR02, PR04**] donnent une preuve par des techniques de géométrie algébrique qui s'inspire de la preuve de Hrushovski. Enfin une preuve utilisant la théorie d'Arakelov via l'équidistribution des orbites sous Galois des points de petite hauteur d'une conjecture plus forte due

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11G10, 11G18, Secondary 14G35, 14K15.

à Bogomolov est obtenue par Zhang [**Zha98**] et le deuxième auteur de cette note [**Ull98**].

La preuve présentée ici s'inspire des récentes stratégies de preuve de la conjecture d'André-Oort, qui est un analogue dans le cadre des variétés de Shimura de la conjecture de Manin-Mumford. Dans ce cadre les méthodes galoisiennes dues à Edixhoven et Yafaev [**EY03**] se combinent aux méthodes issues de la théorie ergodique développées par Clozel et le second auteur [**CU05**]. Cette stratégie est expliquée de manière générale dans un travail récent de Yafaev et le second auteur [**UY06**] et présentée dans un cas particulier simple de la conjecture d'André-Oort sous l'hypothèse de Riemann dans ce volume [**UY**].

Dans le cadre des variétés abéliennes nous combinons des résultats galoisiens dus à Serre à des techniques élémentaires d'équidistribution de sous-variétés abéliennes. Les résultats galoisiens utilisés ici sont au centre de la méthode de Hindry et la preuve donnée ici ne peut qu'être considérée comme une variante de la preuve de Hindry. Il est notable que la traduction dans le cadre abélien des idées d'Edixhoven et Yafaev [**EY03**] donne assez naturellement la preuve de Hindry de la conjecture de Manin-Mumford et qu'il n'est pas utile d'utiliser les techniques ergodiques dans ce cadre. Nous ne savons pas si il est possible de s'en dispenser aussi dans une preuve de la conjecture d'André-Oort.

Nous espérons que la preuve de la conjecture de Manin-Mumford présentée dans cette note pourra aider le lecteur intéressé par la conjecture d'André-Oort à comprendre la stratégie mise en oeuvre pour les variétés de Shimura. Pour rendre la présentation plus agréable et naturelle nous avons utilisé un résultat non publié de Daniel Bertrand d'effectivité dans le lemme de Poincaré pour les variétés abéliennes. Nous le remercions pour les notes qu'il a eu la gentillesse de nous transmettre ainsi que pour la permission de présenter ici ses résultats que nous avons insérés en appendice.

1.1. Notations et conventions. On dira que V/k est une *variété (définie) sur un corps k* si V est un k-schéma de type fini, géométriquement réduit. Si V/k est une variété définie sur un corps k et si L est une k-algèbre, on notera V_L la variété produit fibré de V et $\mathrm{Spec}\,(L)$ au dessus de $\mathrm{Spec}\,(k)$.

Dans toute la suite, on fixe $A/\overline{\mathbb{Q}}$ une variété abélienne. On se donne K un corps de nombres sur lequel A est définie ainsi que toutes ses sous-variétés abéliennes (un tel corps existe et peut-être choisi de degré $3^{(2\dim A)^4}$ sur un corps de définition de A, cf. par exemple [**MW93**] lemma 2.2.). On se donne également un fibré en droites $\mathcal{L}$ très ample sur A/K de sorte à avoir une notion de degré projectif deg relativement à $\mathcal{L}$.

Si E est un ensemble de points de $A(\overline{\mathbb{Q}})$, on notera $\overline{E}$ son adhérence de Zariski dans A/K. Enfin on notera A_{tors} l'ensemble des points de torsion de $A(\overline{\mathbb{Q}})$ et, si V est une sous-variété de A, on notera V_{tors} l'ensemble $V(\overline{\mathbb{Q}}) \cap A_{\text{tors}}$ des points de torsion de A situés sur V.

Définition 1.1. Soit $V/\overline{\mathbb{Q}}$ une sous-variété irréductible de A. On dit que V est une *variété de torsion* s'il existe une sous-variété abélienne B de A et un point de torsion $\xi \in A_{\text{tors}}$ tels que $V = B + \xi$.

Une variété V/K définie sur un corps de nombres K est dite *de torsion* si $V_{\overline{\mathbb{Q}}}$ est une réunion de sous-variétés de torsion.

On utilisera les symboles $\ll$ et $\gg$ pour dire inférieur à (respectivement supérieur à), à une constante ne dépendant que de $(A, K, \mathcal{L}, V)$ près.

2. Effectivité dans le lemme de Poincaré

Supposant connu le lemme de réductibilité de Poincaré, qui affirme que toute variété abélienne est isogène à un produit de variétés abéliennes simples, nous donnons ici une version effective de ce résultat due à Bertrand. Cet énoncé (plus fort que ce dont nous aurions réellement besoin) permet de présenter les choses de façon naturelle dans la preuve du résultat principal (cf. la remarque 3.1. du paragraphe 3). Nous en donnons en appendice la preuve, telle qu'on la trouve dans l'appendice de [**Ber**].

PROPOSITION 2.1. **(Bertrand)** *Pour toute sous-variété abélienne B de A, il existe une sous-variété abélienne B' de A telle que*

$$A = B + B' \text{ et telle que } \operatorname{card}(B \cap B') \ll 1.$$

3. Preuve du théorème 1.1

Notons

$$\Sigma_V = \left\{ X/\overline{\mathbb{Q}} \text{ sous-variété de torsion de } A \ \mid X \subset V_{\overline{\mathbb{Q}}} \right\}.$$

Définition 3.1. Une suite $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Σ_V est *générique pour V* si pour toute sous-variété W de $V_{\overline{\mathbb{Q}}}$, distincte de $V_{\overline{\mathbb{Q}}}$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid \Sigma_n \subset W\}$ est fini.

Soit $(\Sigma_n)_{\in\mathbb{N}}$ une suite générique pour V (une telle suite existe d'après l'hypothèse faite sur V_{tors}. En fait il existe même une suite générique constituée de points de torsion.). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ choisissons arbitrairement une représentation

$$\Sigma_n = A_n + \xi_n$$

où A_n est une sous-variété abélienne de A et ξ_n un point de torsion de A.

En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A'_n la variété associée à A_n par la proposition 2.1, on voit qu'il existe $(a_n, a'_n) \in A_n \times A'_n$ de torsion tels que $\xi_n = a_n + a'_n$. Quitte à remplacer ξ_n par a'_n on peut supposer (et nous le ferons dans la suite) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Sigma_n = A_n + \xi_n \quad \text{ avec } \xi_n \text{ de torsion dans } A'_n.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note d_n l'ordre du point ξ_n ainsi obtenu. Deux situations peuvent alors apparaître :

1. La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Dans ce cas un argument ergodique va nous permettre de conclure.
2. La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non-bornée. Dans ce cas la combinaison d'un argument galoisien et d'un argument diophantien vont nous permettre de conclure par un procédé itératif.

Remarque 3.1. Notons que le fait que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ou n'est pas bornée ne dépend pas du choix du point ξ_n pris dans A'_n (ceci précisément grâce au résultat de Bertrand). En effet soient ξ_n et ξ'_n deux points de torsion de A'_n, d'ordre respectifs d_n et d'_n, tels que $\Sigma_n = A_n + \xi_n = A_n + \xi'_n$. On a

$$\xi_n - \xi'_n \in A_n \cap A'_n.$$