die Form

$$\pm\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}x^s\,ds.$$

Nun ist aber

$$\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{d\beta}=\frac{1}{(\beta-s)\beta},$$

und, wenn der reelle Theil von s grösser als der reelle Theil von β ist,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^s\,ds}{(\beta-s)\beta}=\frac{x^\beta}{\beta}=\int\limits_{\infty}^{x}x^{\beta-1}\,dx,$$

oder

$$=\int\limits_{0}^{x}x^{\beta-1}\,dx,$$

je nachdem der reelle Theil von β negativ oder positiv ist. Man hat daher

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}x^s\,ds$$

$$\begin{aligned}&=\ -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)x^s\,ds\\ &=\int\limits_{\infty}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}\,dx+\text{ const. im ersten}\end{aligned}$$

und

$$=\int\limits_{0}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}\,dx+\text{ const. im zweiten Falle.}$$

Im ersten Falle bestimmt sich die Integrationsconstante, wenn man den reellen Theil von β negativ unendlich werden lässt; im zweiten Falle erhält das Integral von 0 bis x um $2\pi i$ verschiedene Werthe, je nachdem die Integration durch complexe Werthe mit positivem oder negativem Arcus geschieht, und wird, auf jenem Wege genommen, unendlich klein, wenn der Coefficient von i in dem Werthe von β positiv unendlich wird, auf letzterem aber, wenn dieser Coefficient negativ unendlich wird. Hieraus ergiebt sich, wie auf der linken Seite $\log\left(1-\dfrac{s}{\beta}\right)$ zu bestimmen ist, damit die Integrationsconstante wegfällt.

Durch Einsetzung dieser Werthe in den Ausdruck von $f(x)$ erhält man

$$f(x) = Li(x) - \sum\nolimits^{\alpha}\left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right) + \int\limits_{x}^{\infty} \frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{x\log x} + \log\xi(0),$$

wenn in $\sum^{\alpha}$ für α sämmtliche positiven (oder einen positiven reellen Theil enthaltenden) Wurzeln der Gleichung $\xi(\alpha) = 0$, ihrer Grösse nach geordnet, gesetzt werden. Es lässt sich, mit Hülfe einer genaueren Discussion der Function ξ, leicht zeigen, dass bei dieser Anordnung der Werth der Reihe

$$\sum\left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)\log x$$

mit dem Grenzwerth, gegen welchen

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-bi}^{a+bi} \frac{d\frac{1}{s}\sum\log\left(1+\frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right)}{ds} x^s\,ds$$

bei unaufhörlichem Wachsen der Grösse b convergirt, übereinstimmt; durch veränderte Anordnung aber würde sie jeden beliebigen reellen Werth erhalten können.

Aus $f(x)$ findet sich $F(x)$ mittelst der durch Umkehrung der Relation

$$f(x) = \sum\frac{1}{n}F\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

sich ergebenden Gleichung

$$F(x) = \sum(-1)^{\mu}\frac{1}{m}f\left(x^{\frac{1}{m}}\right),$$

worin für m der Reihe nach die durch kein Quadrat ausser 1 theilbaren Zahlen zu setzen sind und μ die Anzahl der Primfactoren von m bezeichnet.

Beschränkt man $\sum^{\alpha}$ auf eine endliche Zahl von Gliedern, so giebt die Derivirte des Ausdrucks für $f(x)$ oder, bis auf