$$F(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}.$$

Ersetzt man nun in

$$\log\zeta(s) = -\sum \log(1-p^{-s}) = \sum p^{-s} + \tfrac{1}{2}\sum p^{-2s} + \tfrac{1}{3}\sum p^{-3s} + \cdots$$

$$p^{-s} \text{ durch } s\int\limits_p^\infty x^{-s-1}\,ds, \quad p^{-2s} \text{ durch } s\int\limits_{p^2}^\infty x^{-s-1}\,ds, \ldots,$$

so erhält man

$$\frac{\log\zeta(s)}{s} = \int\limits_1^\infty f(x)x^{-s-1}\,dx,$$

wenn man

$$F(x) + \tfrac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

durch $f(x)$ bezeichnet.

Diese Gleichung ist gültig für jeden complexen Werth $a+bi$ von s, wenn $a > 1$. Wenn aber in diesem Umfange die Gleichung

$$g(s) = \int\limits_0^\infty h(x)x^{-s}\,d\log x$$

gilt, so kann man mit Hülfe des *Fourier*'schen Satzes die Function h durch die Function g ausdrücken. Die Gleichung zerfällt, wenn $h(x)$ reell ist und

$$g(a+bi) = g_1(b) + ig_2(b),$$

in den beiden folgenden:

$$g_1(b) = \int\limits_0^\infty h(x)x^{-a}\cos(b\log x)\,d\log x,$$

$$ig_2(b) = -i\int\limits_0^\infty h(x)x^{-a}\sin(b\log x)\,d\log x.$$

Wenn man beide Gleichungen mit

$$(\cos(b\log y) + i\sin(b\log y))\,db$$

multiplicirt und von $-\infty$ bis $+\infty$ integrirt, so erhält man in beiden auf der rechten Seite nach dem *Fourier*'schen Satze $\pi h(y)y^{-\alpha}$, also, wenn man beide Gleichungen addirt und mit iy^α multiplicirt,

$$2\pi i h(y) = \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s) y^s \, ds,$$

worin die Integration so auszuführen ist, dass der reelle Theil von s constant bleibt.

Das Integral stellt für einen Werth von y, bei welchem eine sprungweise Aenderung der Function $h(y)$ stattfindet, den Mittelwerth aus den Werthen der Function h zu beiden Seiten des Sprunges dar. Bei der hier vorausgesetzten Bestimmungsweise der Function $f(x)$ besitzt diese dieselbe Eigenschaft, und man hat daher völlig allgemein

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log \zeta(s)}{s} y^s \, ds.$$

Für $\log \zeta$ kann man nun den früher gefundenen Ausdruck

$$\frac{s}{2} \log \pi - \log(s-1) - \log \Pi\left(\frac{s}{2}\right) + \sum{}^{\alpha} \log\left(1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right) + \log \xi(0)$$

substituiren; die Integrale der einzelnen Glieder dieses Ausdrucks würden aber dann ins Unendliche ausgedehnt nicht convergiren, weshalb es zweckmässig ist, die Gleichung vorher durch partielle Integration in

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d \dfrac{\log \zeta(s)}{s}}{ds} x^s \, ds$$

umzuformen.

Da

$$-\log \Pi\left(\frac{s}{2}\right) = \lim \left(\sum_{n=1}^{n=m} \log\left(1 + \frac{s}{2n}\right) - \frac{s}{2} \log m \right),$$

für $m = \infty$, also

$$-\frac{d \frac{1}{s} \log \Pi\left(\frac{s}{2}\right)}{ds} = \sum_{1}^{\infty} \frac{d \frac{1}{s} \log\left(1 + \frac{s}{2n}\right)}{ds},$$

so erhalten dann sämmtliche Glieder des Ausdruckes für $f(x)$ mit Ausnahme von

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{ss} \log \xi(0) x^s \, ds = \log \xi(0)$$